AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość Elementów Maszyn

Wykład Nr 7

Stateczność prętów

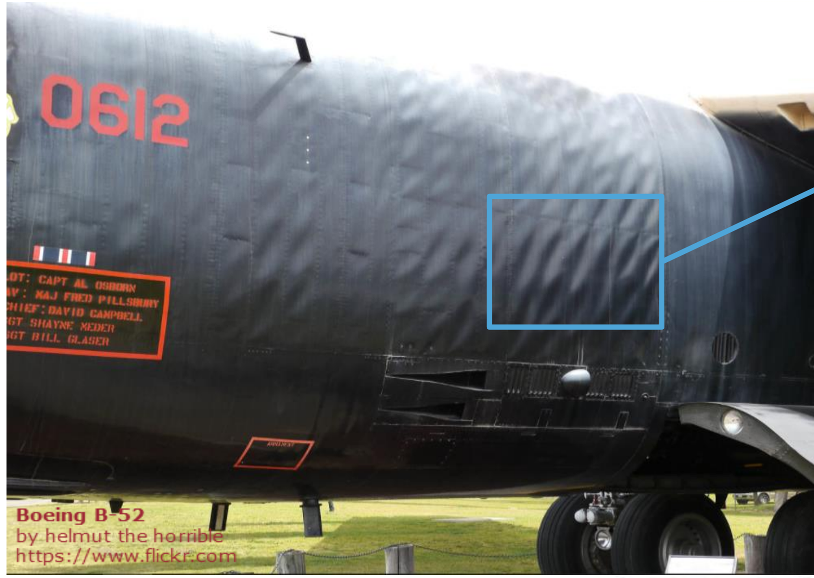
pojęcie wyboczenia; przykłady zjawiska wyboczenia; pojęcie siły krytycznej; wyboczenie sprężyste; wzór Eulera; smukłość prętów; granice stosowalności wzoru Eulera, wyboczenie sprężysto-plastyczne; wzór Tetmajera – Jasińskiego; wzór Johnsona – Ostenfelda; warunek bezpieczeństwa na wyboczenie.

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Projektowania i Eksploatacji Maszyn

dr hab. inż. Tomasz Machniewicz, prof. AGH

machniew@agh.edu.pl

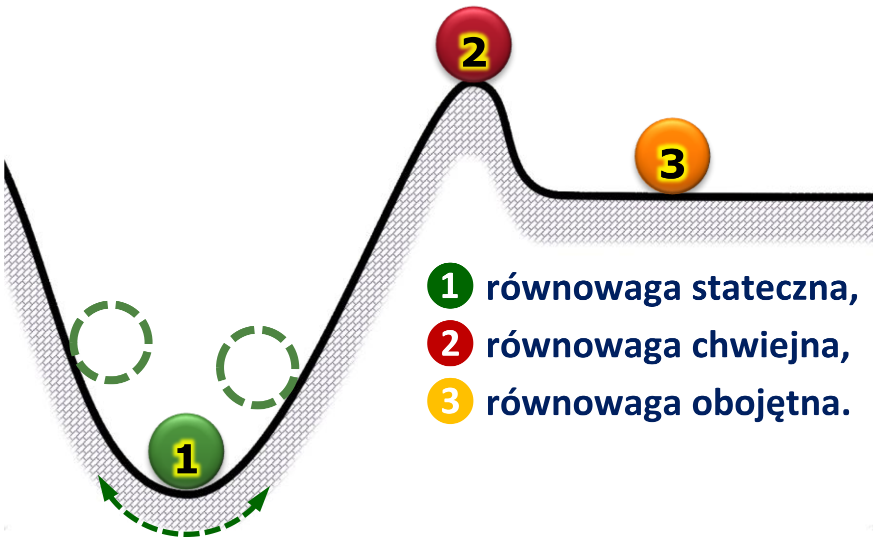
7.1. Wyboczenie – przykładowe problemy inżynierskie



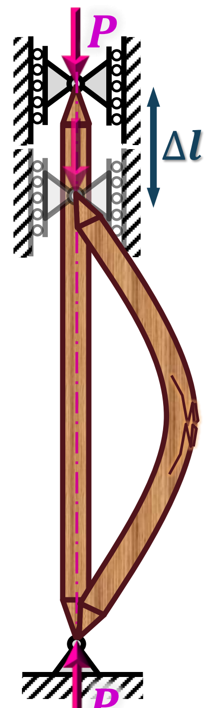
1.0m 1.5m 2.0m 2.5m

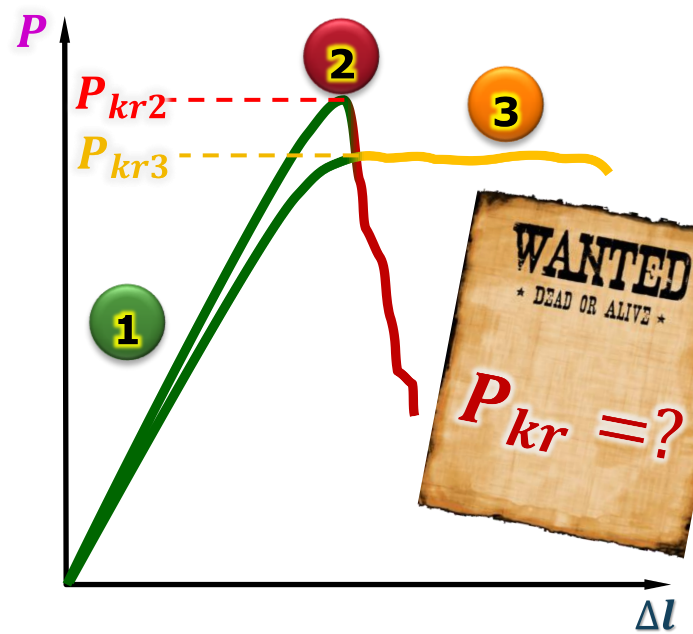
Wyboczenie – zjawisko wygięcia osi elementu konstrukcyjnego – najczęściej pręta – w wyniku działania siły ściskającej, co wiąże się ze zmianą sposobu obciążenia ze ściskania osiowego do ściskania mimośrodowego, czemu towarzyszy zginanie.

Bywa, że samo spełnienie przez układ ogólnych warunków równowagi statycznej nie jest wystarczającym gwarantem bezpiecznej pracy konstrukcji.
Niekiedy ilość energii potrzebna do wytrącenia ciała z równowagi jest tak mała, że nastąpić to może w sposób przypadkowy – stateczność układu jest za mała.
Jeżeli ruch ciała następujący po dowolnie małym wychyleniu z położenia równowagi zmierza w kierunku powrotu ciała do pozycji początkowej, równowagę taką nazywa się **równowagą stateczną** (**stałą**). W przeciwnym przypadku mamy do czynienie z **równowagą chwiejną** lub **równowagą obojętną**.



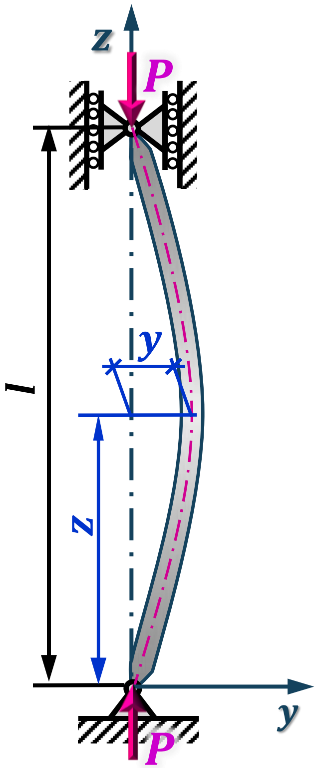
Równowaga stateczna odpowiada minimum energii, **równowaga chwiejna** – maksimum energii; w **równowadze obojętnej** wartość energii nie zmienia się przy zmianie położenia ciała.





7.3. Wyboczenie sprężyste

Siła krytyczna (P_{kr}) – siła osiowa, przy której następuje utrata stateczności, tj. przejście układu ze stanu równowagi stałej do stanu równowagi chwiejnej, lub obojętnej, czemu odpowiada zmiana postaci pręta z prostej na wygiętą.



Równanie różniczkowe linii ugięcia pręta: $EJ\dfrac{d^2y}{dz^2} = -M_g(z) = -Py$ (1)

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{P}{EJ}y = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dz^2} + k^2 y = 0 \quad \text{gdzie:} \quad k^2 = \frac{P}{EJ}} \qquad (2)$$

Całka ogólna równania (2) ma postać: $\boxed{y = A\sin kz + B\cos kz}$ (3)

Warunki brzegowe: 1° $y(z=0) = 0 \Rightarrow B\cos kz = 0 \Rightarrow B = 0$

2° $y(z=l) = 0$, uwzględniając: $B = 0$ $\Rightarrow$ $A\sin kl = 0$, uwzględniając: $A \neq 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{kl = n\pi}$ (4)

$$\left.\begin{matrix}(2)\\(4)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{n^2\pi^2}{l^2} = \frac{P}{EJ} \Rightarrow \boxed{P = \frac{n^2\pi^2 EJ}{l^2}} \quad \text{dla: } n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

Po odrzuceniu $n = 0$ ($P = 0$), wartość $n = 1$ określa najmniejszą siłę P, przy której jest możliwa równowaga pręta w stanie wygiętym, to tzw. **eulerowska siła krytyczna:**

wzór Eulera:

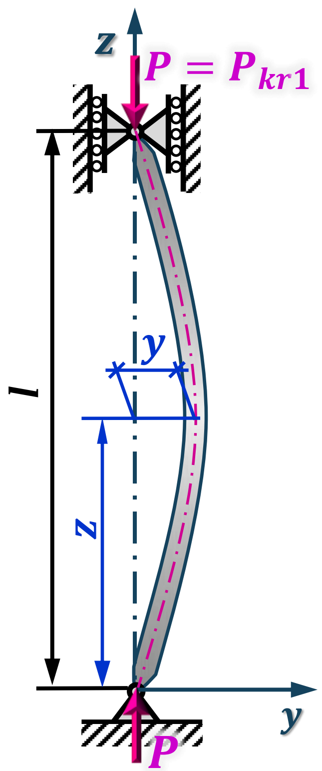
$$\boxed{P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}}$$

Leonhard Euler
(1707–1783)
szwajcarski matematyk i fizyk

7.3. Wyboczenie sprężyste

$$\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{n^2\pi^2 EJ}{l^2} \\ \text{dla } \underline{n = 1}: \end{array}\right\} \Rightarrow P_{kr1} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad \text{wówczas:} \quad \left.\begin{array}{l} y = A\sin kz \\ kl = n\pi = \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y = A\sin\frac{z}{l}\pi}$$

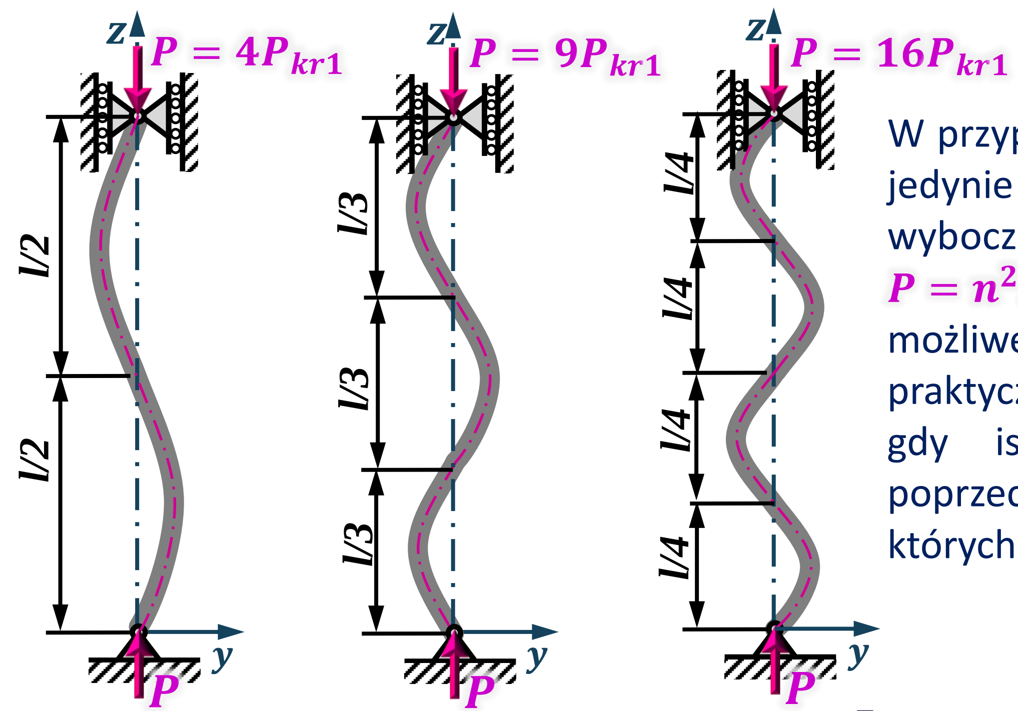
oś pręta ma kształt półfali sinusoidy



$y = A\sin\frac{z}{l}\pi$

Jeżeli za n podstawi się kolejne liczny naturalne ($n = 2, 3, 4 \ldots$), oś pręta przybierze postać dwu, trzech, lub więcej sinusoidalnych półfal:

$\underline{n = 2}$ $\underline{n = 3}$ $\underline{n = 4}$



$y = A\sin 2\frac{z}{l}\pi$ $\quad y = A\sin 3\frac{z}{l}\pi$ $\quad y = A\sin 4\frac{z}{l}\pi$

W przypadku prętów zamocowanych jedynie na obu końcach postacie wyboczenia odpowiadające siłom $P = n^2 P_{kr1}$, choć teoretycznie możliwe, nie mają znaczenia praktycznego. Mogą wystąpić jednak gdy istnieją dodatkowe reakcje poprzeczne w punktach z dla których $y(z) = 0$, np.:

7.3. Wyboczenie sprężyste

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

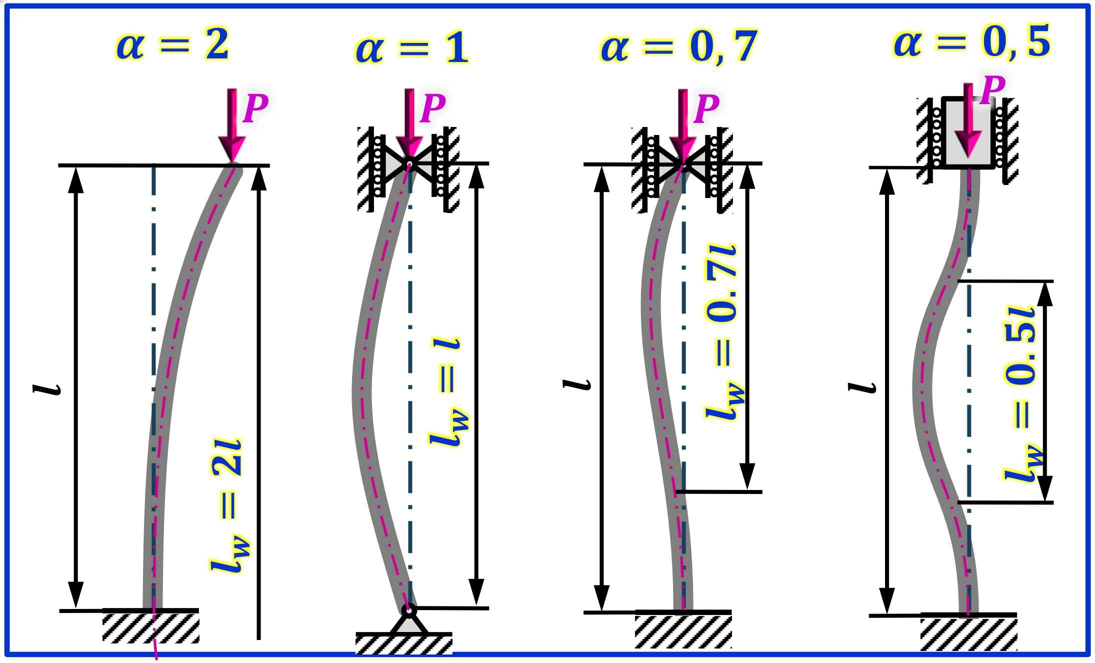
Wzór Eulera w podanej postaci dotyczy tylko ściskania pręta o długości l zamocowanego obustronnie-przegubowo. Zmiana sposobu zamocowania, wiąże się ze zmianą warunków brzegowych i wpływa na zmianę rozwiązania na siłę krytyczną.

Uogólniony wzór Eulera:

$$\boxed{P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2}}$$

gdzie: $l_w = \alpha \cdot l$ – wyboczeniowa długość pręta,

α – współczynnik zależny od warunków mocowania,



Naprężenia krytyczne:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{kr} &= \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2 A} \\ i^2 &= \frac{J}{A} \end{aligned}\right] \Rightarrow \sigma_{kr} = \pi^2 E \frac{i^2}{l_w^2}$$

$$\boxed{\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$

gdzie: $\lambda = \frac{l_w}{i}$ – **smukłość pręta**

Wzór Eulera można stosować, gdy:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq R_H$$

R_H – granica proporcjonalności

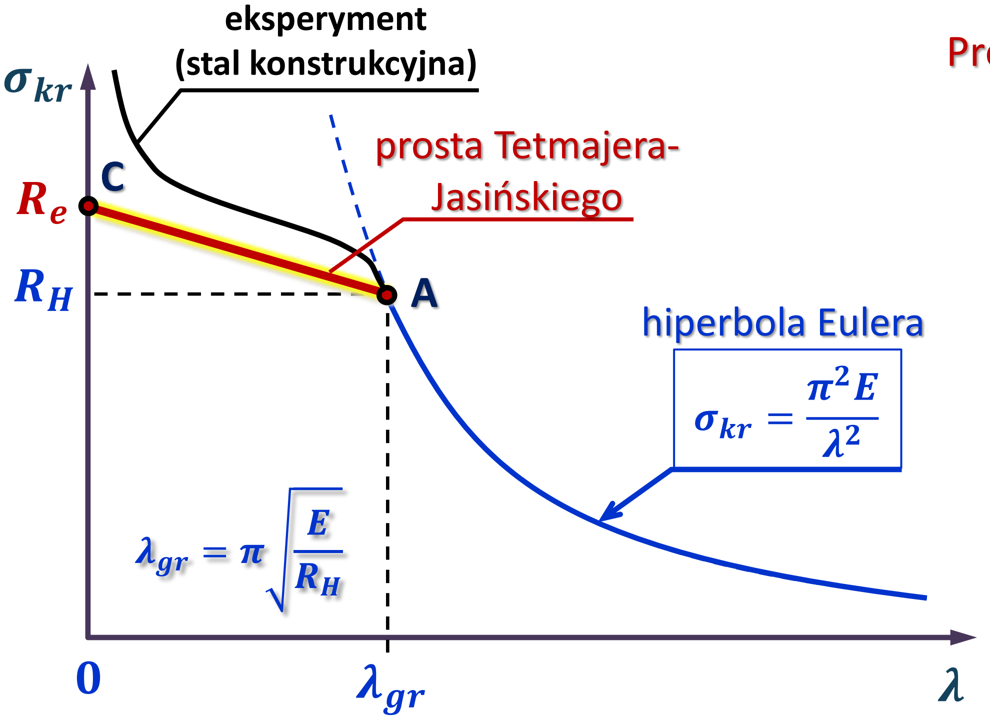
stąd: $$\boxed{\lambda \geq \lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}}}$$

λ_{gr} – **smukłość graniczna**

Wzór Eulera można stosować, tylko gdy:
$\lambda \geq \lambda_{gr}$

7.4. Wyboczenie sprężysto-plastyczne

7.4.1. Wzór Tetmajera-Jasińskiego: $\boxed{\sigma_{kr} = a - b\lambda}$ dla $\lambda < \lambda_{gr}$ gdzie: a, b – stałe materiałowe



Prosta Tetmajera – Jasińskiego łączy punkty **A** i **C**:

C: $\left.\begin{aligned}\lambda &= 0\\ \sigma_{kr} &= R_e\end{aligned}\right\} \Rightarrow a - b \cdot 0 = R_e \Rightarrow \boxed{a = R_e}$

A: $\left.\begin{aligned}\lambda &= \lambda_{gr}\\ \sigma_{kr} &= R_H\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a - b \cdot \lambda_{gr} &= R_H\\ a &= R_e\end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow b &= \frac{R_e - R_H}{\lambda_{gr}}\\ \lambda_{gr} &= \pi\sqrt{\frac{E}{R_H}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{b = \frac{R_e - R_H}{\pi}\sqrt{\frac{R_H}{E}}}$$

Ludwig von Tetmajer (1872-1943) szwajcarski profesor, inżynier

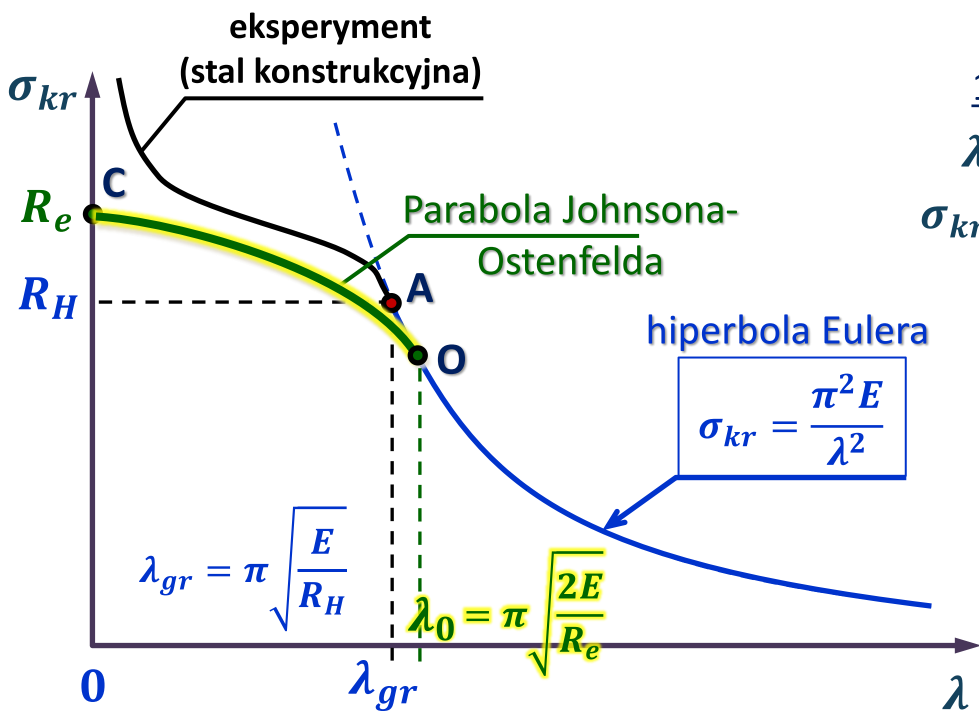
Feliks Jasiński (1856–1899) polski inżynier, profesor w Petersburgu

Stąd rów. Tetmajera-Jasińskiego w postaci:

$$\boxed{\sigma_{kr} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi}\sqrt{\frac{R_H}{E}}\lambda}$$ dla $\lambda < \lambda_{gr}$

7.4.2. Johnsona-Ostenfelda: $\sigma_{kr} = A - B\lambda^2$

dla $\lambda < \lambda_0$ gdzie: A, B – stałe materiałowe



Cechy paraboli Johnsona-Ostenfelda:

1° ma wierzchołek w punkcie C:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda = 0\\ \sigma_{kr} = R_e\end{array}\right\} \Rightarrow A - B\cdot 0 = R_e \Rightarrow \boxed{A = R_e}$$

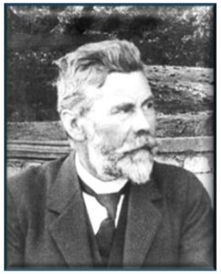
2° jest styczna do hip. Eulera w punkcie O:

$$-2B\cdot\lambda_0 = -\frac{2\pi^2 E}{\lambda_0^3} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^4}}$$

3° zachowuje ciągłość z hip. Eulera w punkcie O:

$$R_e - \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^4}\cdot\lambda_0^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2} \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = \pi\sqrt{\frac{2E}{R_e}}}$$

John Bertrand Johnson (1887-1970) urodzony w Szwajcarii amerykański inżynier i fizyk



Asger Skovgaard Ostenfeld (1886–1831) duński inżynier, profesor mechaniki stosowanej

Stąd rów. Johnsona-Ostenfelda w postaci:

$$\boxed{\sigma_{kr} = R_e - \frac{R_e^2}{4E\pi^2}\lambda^2}$$

dla $\lambda < \lambda_0$

7.5. Projektowanie prętów na wyboczenie

7.5.1. Wartości współczynników (dla σ_{kr} w MPa) we wzorach Tetmajera-Jasińskiego i Johnsona-Ostenfelda[1)]

Materiał	E (GPa)	wzór Tetmajera-Jasińskiego: $\sigma_{kr} = a - b\lambda$ dla $\lambda < \lambda_{gr} = \pi\sqrt{\frac{E}{R_H}}$			wzór Johnsona-Ostenfelda: $\sigma_{kr} = A - B\lambda^2$ dla $\lambda < \lambda_0 = \pi\sqrt{\frac{2E}{R_e}}$		
		λ_{gr}	a	b	λ_0	A	B
Stal niskowęglowa	210	105	310	1.14	116	310	0.0116
Stal (0.28 – 0.37 % C)	210	100	464	3.62	94	464	0.0260
Stal niklowa (do 5% Ni)	211	86	470	2.30	94	470	0.0266
Drewno miękkie (świerk)	12	100	29.3	0.194	90	29.3	0.002

1) Dyląg Z. Jakubowicz A., Orłoś Z.: Wytrzymałość materiałów. T. 1. WNT

7.5.2. Zasady obliczeń wytrzymałościowych na wyboczenie:

1° Warunek bezpieczeństwa na wyboczenie: $\boxed{P \le P_{dop,w} = \frac{P_{kr}}{n_w}}$ lub $\boxed{\sigma = \frac{P}{A} \le \sigma_{dop,w}}$ $\quad \sigma_{dop,w} = \frac{\sigma_{kr}}{n_w}$

gdzie: n_w - współczynnik bezpieczeństwa na wyboczenie, uzależniony od rodzaju materiału i smukłości elementu.

2° Warunek bezpieczeństwa sprawdza się dla płaszczyzny, w której rozważany pręt posiada **największą smukłość**: $\lambda = l_w/i$.

3° Obliczając dla danego elementu $P_{dop,w}$ lub $\sigma_{dop,w}$ stosuje się odpowiednie równanie w zależności od wartości λ ($\lambda \ge \lambda_{gr}$ – wzór Eulera, $\lambda < \lambda_{gr}(\lambda_0)$ – wzór T-J (J-O)).

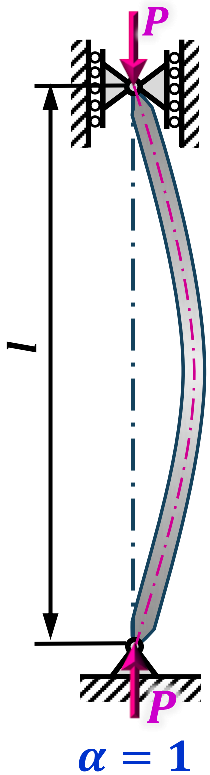
4° Projektując element pod określone obciążenie zakłada się wstępnie występowanie wyboczenia sprężystego stosując w związku z tym wzór Eulera. Po dobraniu wymiarów elementu sprawdzany jest warunek $\lambda \ge \lambda_{gr}$ i – jeśli nie jest spełniony – obliczenia weryfikuje się z użyciem wzorów empirycznych (tj. T-J lub J-O).

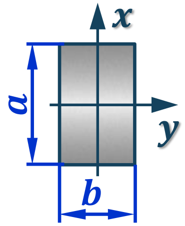
Przykład 7.1:

Pręt o długości l, zamocowany przegubowo na obu końcach i w obu płaszczyznach ma przekrój prostokąta o wymiarach $a \times b$. Obliczyć krytyczną wartość siły ściskającej pręt.

Dane: $l = 1{,}2\ m, a = 60\ mm, b = 40\ mm, E = 2.1 \cdot 10^5\ MPa, R_e = 240\ MPa, R_H = 204\ MPa$

Szukane: $P_{kr} = ??$





1° Wyboczeniowa długość pręta: $l_w = \alpha \cdot l = 1 \cdot 1\,200 = 1\,200\ mm$

2° Minimalny moment bezwładności:

$$J_{min} = J_x = \frac{ab^3}{12} = \frac{60 \cdot 40^3}{12} = 320\,000\ mm^4$$

3° Minimalny promień bezwładności:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{J_{min}}{a \cdot b}} = \sqrt{\frac{320\,000}{40 \cdot 60}} = 11.547\ mm$$

4° Smukłość:

$$\lambda = \frac{l_w}{i} = \frac{1\,200}{11.547} = 103.92 \qquad \lambda_{gr} = \pi\sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi\sqrt{\frac{2.1 \cdot 10^5}{200}} = 101.8$$

5° Siła krytyczna:

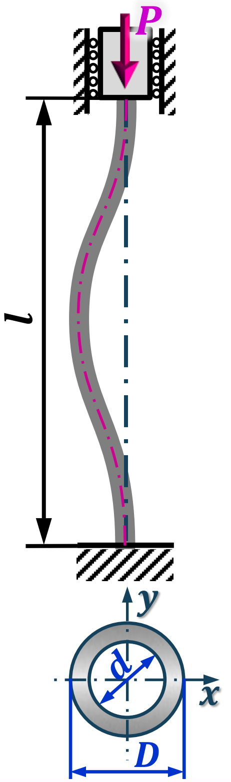
$$\boxed{\lambda > \lambda_{gr}} \Rightarrow P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^5 \cdot 320\,000}{1\,200^2} = 460\,581\ N$$

Przykład 7.2: Słup o przekroju rury grubościennej ($D/d = 3/2$) i długości l, ma być wykonany ze stali konstrukcyjnej i przenosić obciążenie P z zachowaniem współczynnika bezpieczeństwa n_w. Dobrać średnicę zewnętrzną (D) i wewnętrzną (d) słupa, traktując jego zamocowanie jako obustronne utwierdzenie.

Dane: $\boldsymbol{l = 1\,m,\ D/d = 3/2,\ P = 1\,MN,\ E = 2.07 \cdot 10^5\,MPa,\ R_e = 235\,MPa,\ R_H = 200\,MPa,\ n_w = 3}$

Szukane: $\boldsymbol{D = ??, d = ??}$

$\alpha = 0.5$



1° Wyboczeniowa długość pręta: $l_w = \alpha \cdot l = 0.5 \cdot 1\,000 = 500\,mm$

2° Osiowy moment bezwładności:

$$J = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64} = \frac{\pi\left(D^4 - \left(\frac{2}{3}D\right)^4\right)}{64} = \frac{\pi\left(D^4 - \frac{16}{81}D^4\right)}{64} = \frac{65\pi D^4}{5\,184}$$

3° Warunek bezpieczeństwa (oparty na równaniu Eulera):

$$P \le P_{dop,w} = \frac{P_{kr}}{n_w};\quad \text{zakładając: } \lambda > \lambda_{gr} \Rightarrow P \le \frac{\pi^2 EJ}{n_w \cdot l_w^2} \Rightarrow \boxed{P \le \frac{65\pi^3 E D^4}{5\,184 \cdot n_w \cdot l_w^2}}$$

$$D \ge \sqrt[4]{\frac{5\,184 \cdot n_w \cdot l_w^2 \cdot P}{65\pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{5\,184 \cdot 3 \cdot 500^2 \cdot 1 \cdot 10^6}{65\pi^3 \cdot 2.1 \cdot 10^5}} = 55.054\,mm$$

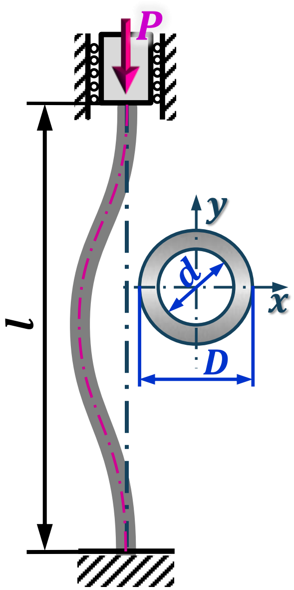
Wstępnie: $D = 55.5\,mm$ $\quad d = 2/3 \cdot 55.5 = 37\,mm$

Przykład 7.2:

Dane: $l = 1\,m,\ D/d = 3/2,\ P = 1\,MN,\ E = 2.07 \cdot 10^5\,MPa,\ R_e = 235\,MPa,\ R_H = 200\,MPa,\ n_w = 3$

Szukane: $D = ??,\ d = ??$ Wstępnie dobrano: $D = 55.5\,mm \quad d = 37\,mm$

$\alpha = 0.5$



4° Sprawdzanie warunku smukłości:

$$J = \frac{65\pi D^4}{5\,184}; \quad A = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} = \frac{\pi\left(D^2 - \left(\frac{2}{3}D\right)^2\right)}{4} = \frac{5\pi D^2}{36}$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{65\pi D^4}{5\,184} \cdot \frac{36}{5\pi D^2}} = \sqrt{\frac{65\pi D^4}{5\,184} \cdot \frac{36}{5\pi D^2}} = \sqrt{\frac{13D^2}{144}} = \frac{\sqrt{13}}{12}D$$

$$\lambda = \frac{l_w}{i} = \frac{12 l_w}{\sqrt{13} \cdot D} = \frac{12 \cdot 500}{\sqrt{13} \cdot 55.5} = 30; \quad \lambda_{gr} = \pi\sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi\sqrt{\frac{2.07 \cdot 10^5}{200}} = 101.07$$

$\boxed{\lambda < \lambda_{gr}}$ – nie można stosować wzoru Eulera

5° Dobór średnicy na podstawie wzoru Tetmajera – Jasińskiego:

$$\sigma_c \le \sigma_{dop,w} = \frac{\sigma_{kr}}{n_w} \Rightarrow \sigma_c \le \frac{a - b\lambda}{n_w}; \quad a = R_e; \quad b = \frac{R_e - R_H}{\pi}\sqrt{\frac{R_H}{E}}; \quad \text{(por. p.7.4.1)}$$

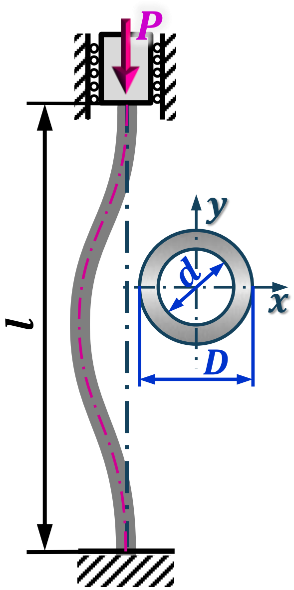
$$\sigma_c \le \frac{1}{n_w}\left(R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi}\sqrt{\frac{R_H}{E}}\lambda\right) \Rightarrow \sigma_c \le \frac{1}{n_w}\left(R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi}\sqrt{\frac{R_H}{E}}\frac{12 l_w}{\sqrt{13} \cdot D}\right)$$

Przykład 7.2:

Dane: $l = 1\,m,\ D/d = 3/2,\ P = 1\,MN,\ E = 2.07\cdot 10^5\,MPa,\ R_e = 235\,MPa,\ R_H = 200\,MPa,\ n_w = 3$

Szukane: $D = ??,\ d = ??$

$\alpha = 0.5$



$$\sigma_c \le \frac{1}{n_w}\left(R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi}\sqrt{\frac{R_H}{E}\frac{12 l_w}{\sqrt{13}\cdot D}}\right); \qquad \sigma_c = \frac{P}{A}; \qquad A = \frac{5\pi D^2}{36}$$

$$\frac{36P}{5\pi D^2} \le \frac{1}{n_w}\left(R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi}\sqrt{\frac{R_H}{E}\frac{12 l_w}{\sqrt{13}\cdot D}}\right)$$

$$R_e D^2 - \frac{R_e - R_H}{\pi}\sqrt{\frac{R_H}{E}\frac{12 l_w}{\sqrt{13}}}\,D - \frac{36 n_w P}{5\pi} \ge 0$$

Po podstawieniu:

$$235 D^2 - \frac{235 - 200}{\pi}\sqrt{\frac{200}{2.07\cdot 10^5}\frac{12\cdot 500}{\sqrt{13}}}\,D - \frac{36\cdot 3\cdot 10^6}{5\pi} \ge 0$$

$$\boxed{235 D^2 - 576.272 D - 6\,875\,493 \ge 0}$$

$$\Delta = 576.272^2 - 4\cdot 235\cdot(-6\,875\,493) \Rightarrow \Delta = 6\,463\,296\,019; \qquad \sqrt{\Delta} = 80\,394.6$$

$$D_1 = \frac{576.272 - 80\,394.6}{2\cdot 235} < 0 \qquad D_{min} = D_2 = \frac{576.272 + 80\,394.6}{2\cdot 235} = 172.3\,mm$$

Można przyjąć: $D = 174\ mm \qquad d = 2D/3 = 116\ mm$